M14　3D 陽解法 MLPG 法（メッシュレス法）の開発と溶接移動熱源問題への応用

堀　友則　(指導教員 柴原・深沢・池田・馬場)

Development of 3D Explicit MLPG and Application for Welding Moving Heat Source Problem

by　Tomonori Hori

Abstract

Recently, thermal-elasto-plastic analysis using the finite element method (FEM) has been widely used to predict the phenomenon of welding mechanics. Mesh divisions of elements are needed in FEM computations. Furthermore, preprocessing, which mainly involves creating the mesh divisions, is costly if the analytical model is large or complex, because the analytical accuracy greatly depends on shape and size of the meshes. Some models, such as those producing large deformation, require re-meshing during computing, and this re-meshing also increases the labor and computational cost. To avoid these meshing problems, a meshless method has been developed. In this study, a new meshless method is proposed for analyzing welding deformation and residual stress theoretically with the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method.The preprocessing costs are expected to be much less with MLPG, because the MLPG analysis can be solved using only the shape and boundary of the analytical model and the nodal coordinates. Furthermore, nodes in MLPG can easily be added or removed, which eliminates the need for re-meshing as in FEM, to obtain more accurate results. For these reasons, MLPG is expected to be more adaptive than FEM. MLPG analysis is highly expected to be an effective method for analyzing the welding process which includes locally nonlinear moving phenomena.In the present study, thermo-elastic-plastic analysis using MLPG is developed especially for the structural analysis of welding problems. The proposed method is applied to bead-on-plate welding, which is a fundamental welding test to verify the applicability of the proposed method to residual stress and deformation problems.

1. 緒　　言

メッシュレス法のひとつである MLPG (Meshless Local Petrove-Galerkin Mehod)法では解析対象の形状・境界と節点の座標のみで解析することが可能でありプリプロセッシング時間の大幅な縮小が期待できる．さらに，既存の解析モデルを用いて，より精細に解析を行うには，節点の追加・削除のみで良く，アダプティブな解析を行うことができる．こうした点から MLPG 法は溶接力学問題特有の移動非線形問題および局所非線形問題をモデル化する上で有効な手段になり得ると考えられる．加えて，MLPG 法では内挿関数の作成に MLS を用い，この特徴としては，重み関数や基底関数の選択により，ひずみの連続性まで容易に確保することができる．このため，溶接接合部などで発生する応力集中問題，溶接工程における割れ発生に伴う，き裂進展問題などにおいて有利であると考えられる．

上記の利点がある一方で節点の参照方法に依存して，全体剛性マトリックス（関係マトリックス）の性質が大きく異なる．すなわち，この手法では FEM と異なり，その剛性マトリックスは一般的に非対称行列となる．この点がボトルネックとなり，過去のメッシュレス研究においては，2 次元レベルの適用事例が多く，3 次元の実用的な問題に対する適用事例はあまり行われていない．

本研究ではメッシュレス法の実用的な問題に適用することを可能とするために，MLPG 熱弾塑性解析に陽解法理論を適用し，この問題の解決を試みた．

本開発手法を実際の溶接問題に適用する．具体的には，三次元ビードオンプレート問題を解析し，その解析結果について静的陰解法 FEM と比較検討を行った．また，溶接線近傍で非線形性の強い，溶接問題において特に必要となる，溶接線近傍で節点配置が密となるような不均一節点配置の計算モデルを用いて T 字継ぎ手問題に適用した．また，メッシュレス法の利点の一つである解析中に節点追加を行うプログラムを実装し，トーチの追加に伴い溶接線近傍にのみ節点を追加する計算モデルを用いて，ビードンプレート問題の解析を行い，その結果についてまとめた．

2. 解析理論

2. 1 移動最小二乗法(Moving Least Square Method)

評価点 $\mathbf{x}$ において近似される変位関数を $u^h(\mathbf{x})$ とする．また，内挿に用いる節点数を m 個とした時，変位の近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ は以下のような多項式で仮定する．

$$u^{\mathrm{h}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathrm{J}=1}^{\mathrm{m}} p_{\mathrm{J}}(\mathbf{x}) a_{\mathrm{J}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ は基底関数であり，1 次基底では以下のように表わされる．

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [1, x, y, z] \tag{2}$$

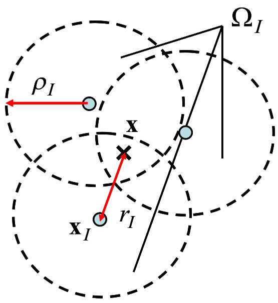

Fig.1 Nodes which are in influence domain

3 次元問題においては，1 次基底関数で 4 点，2 次基底関数では 10 点の節点が最低必要となる．$a(\mathbf{x})$は未定係数であり，重み付きの最小二乗法によって決定される．すなわち，次の汎関数 J を最小化するような $a(\mathbf{x})$を求める．

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x}))=\sum_{I=1}^{\mathrm{N}} w(r)\left[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})-u_I\right]^2 \quad , \quad r=|\mathbf{x}-\mathbf{x}_I| \tag{3}$$

ここに，u_I は節点 $\mathbf{x}_I$ における未知変位である．また，N は評価点近傍の節点の総数であり，Fig.1 のように，評価点を中心とした適当な半径の円によって定義される領域内にあるものを選ぶ．この領域は一般に影響領域と定義されている．$w(r)$は重み関数であり，本研究においては，次のようなキュービックスプライン関数を用いる．

$$w(r)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}-4\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^2+4\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^3 & \left(\dfrac{r}{\rho}\leq\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{4}{3}-4\left(\dfrac{r}{\rho}\right)+4\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^2-\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{r}{\rho}\right)^3 & \left(\dfrac{1}{2}<\dfrac{r}{\rho}\leq 1\right)\\ 0 & \left(\dfrac{r}{\rho}>1\right)\end{cases} \tag{4}$$

ここに ρ は，Fig.1 で示す影響領域の半径である．続いて，式(4)で表わされる汎関数 J を $a(\mathbf{x})$について偏微分して停留値をもとめることにより $a(\mathbf{x})$が導出できる．最終的に内挿関数 $\phi_I(\mathbf{x})$ を用いて以下の式で表わされる．

$$u^{\mathrm{h}}(\mathbf{x})=\sum_{I=1}^{\mathrm{N}}\phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I \tag{5}$$

2. 2 陽解法 MLPG 法定式化

本研究では，材料非線形性を考慮した解析を行う必要があるので増分法による解析を行う．この方法では，荷重や変位を分割することにより，各計算ステップでの支配方程式を線形化して解き，その解を加算して非線形解を求める．MLPG 法の定式化では，まず Fig.2 で示すような，節点 I 近傍に局所的な積分領域 Ω_s を設定する．この局所領域において，応力の平衡方程式を満足させるように，重み付き残差法を適用する．なお紙面の都合上，自然境界条件および基本境界条件は省略した．

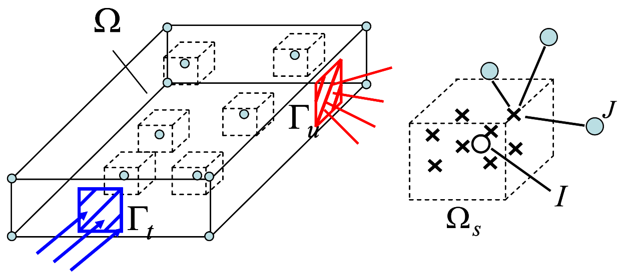

Fig.2 Schematic illustration of local domain of MLPG

$$\int_{\Omega_s}\left(\sigma_{ij,j}+d\sigma_{ij,j}\right)v_i d\Omega=0 \tag{6}$$

続いて，部分積分 $\sigma_{ij,j}v_i=(\sigma_{ij}v_i)_{,j}-\sigma_{ij}v_{i,j}$ を(6)式に用いて，弱形式化する．さらに，ガウスの発散定理を用いて，以下の式となる．

$$\int_{L_s} n_j\left(\sigma_{ij}+d\sigma_{ij}\right)v_i d\Gamma-\int_{\Omega_s}\left(\sigma_{ij}+d\sigma_{ij}\right)v_{i,j}d\Omega=0 \tag{7}$$

ここで，σ は応力を表わす．重み関数 v については，いくつかの選択肢があり異なった定式化が提案されているが本研究では MLS の重み関数である式(4)のキュービックスプライン関数を用いる，MLPG1 により計算を行う．すなわち，$v=w$ としたとき，式(27)は以下のようになる．

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_S} d\sigma_{ij}w_{i,j}d\Omega=\\&-\int_{L_S}\left(t_i+dt_i\right)w_i d\Gamma+\int_{\Omega_S}\sigma_{ij}w_{i,j}d\Omega\end{aligned} \tag{8}$$

なお，L_s は局所領域の境界であり，t は表面力ベクトルを表す．以下簡単のため，マトリックス表記で記述する．次に，材料非線形性および温度依存性を考慮した応力増分ベクトルを以下のように表す．

$$d\sigma=[D]d\varepsilon-\{g\}d\mathrm{T} \tag{9}$$

ここで，$[D]$および$\{g\}$は温度依存および弾塑性を考慮した構成式である．次に，式(9)を式(8)に代入すると次の式となる．

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_S}\left[V^I\right]^T[D]\left[B^J\right]\left\{du^J\right\}d\Omega=\\&\int_{\Omega_S}\left[V^I\right]^T\{\sigma\}d\Omega+\int_{\Omega_S}\left[V^I\right]^T\{g\}d\mathrm{T}d\Omega\end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$[D]$は構成方程式を表すマトリックスである．$[V]$は MLS 重み関数の微分値を成分に持つマトリックスであり，$[B]$は MLS より得られる内挿関数の微係数からなるマトリックスである．また，添え字 J は，Fig.2 に示すような注目する節点 I の積分点の影響領域内に含まれる節点を表わす．ここで，式(11)は節点 I 近傍の局所領域のみで成立するものなので，他の節点についても同様の処理を行い，それらを加算すると次の式が得られる．

$$\sum_{J=1}^{N}\left[K_{IJ}\right]\left\{du^J\right\}=\{G\}+\{R\} \tag{11}$$

以上より，本研究で用いる，$[K]$マトリックス，材料非線形による項$\{G\}$，および，残差力ベクトル$\{R\}$を次の式でまとめる．

$$[K]=\int_{\Omega_s}[V]^T[D][B]d\Gamma \tag{12}$$

$$\{G\}=\int_{\Omega_s}[V]^T\{g\}dTd\Gamma \tag{13}$$

$$\{R\}=\int_{\Omega_s}[V]^T\{\sigma\}d\Gamma \tag{14}$$

各温度ステップで剛性マトリックス$[K]$を作成し，繰り返し計算を行う．なお剛性方程式の求解については陽解法を用いる．すなわち，以下の振動方程式を解く．

$$[M]\{\ddot{U}\}_t + [C]\{\dot{U}\}_t + \{R\}_t = \{F\}_t \tag{15}$$

ただし，質量マトリックス$[M]$および減衰マトリックス$[C]$は対角成分のみを有し，その成分は剛性マトリックス$[K]$の対角成分および任意係数αを用いて以下のように表すことができる．

$$m_{ii} = \alpha k_{ii}, \quad c_{ii} = 2\sqrt{\alpha}\, k_{ii} \tag{16}$$

式(15)の加速度ベクトル，速度ベクトルに対して中央差分，前進差分を用いて，整理すると以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\Delta t^2}[M]+\frac{1}{2\Delta t}[C]\right)\{u\}_{t+\Delta t} = \{F\}_t + \{R\}_t - \\ &\left([K]-\frac{2}{\Delta t^2}[M]\right)\{u\}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2}[M]+\frac{1}{2\Delta t}[C]\right)\{u\}_{t-\Delta t}\end{aligned} \tag{17}$$

式(17)を解き，残差力が十分小さくなるまで反復計算を行うことにより解を得る．

3. 解析結果

3. 1 ビードオンプレート問題への適用

今回用いた計算モデルは，長さ 100(mm)，半幅 50(mm)，厚さ 20(mm)のビードオンプレートであり，問題の対称性を考慮して Fig.3 に示すような 1/2 モデルを用いた．なお節点の配置として、板幅方向に対し 21 点，長手方向に 41 点および板厚方向に 9 点の 7749 節点とした．溶接条件としては溶接速度 5(mm/s)および入熱量 600(J/mm)とし，FEM 解析と MLPG 解析それぞれについて，溶接変形および残留応力の解析を行った．Fig.4 には Fig.3 中 C-C'線上における x 方向応力σ_xおよび y 方向応力σ_yの分布を示している．この結果より，両解析結果は良好に一致していることが確認できる．Fig.5 および Fig.6 にはそれぞれ縦収縮および横収縮の分布についての解析結果を示す．これらの図より，陰解法 FEM 解析結果および陽解法 MLPG 解析結果の両者は，おおむね良好に一致していることが確認できる．

さらに，Fig.7 には x 方向の残留応力分布図を示す．これより，x 方向の残留応力分布は解析領域全体において陽解法 MLPG 解析結果は陰解法 FEM 解析結果と良好に一致していることが確認できる．次に Fig.8 には z 方向の残留変形分布図を示す．これによると，陽解法 MLPG 解析結果は陰解法FEM解析結果と良好に一致していることが確認できる．以上の結果より陽解法 MLPG 解析結果は 3 次元溶接問題に対して十分適用可能であることを確認した．

3. 2 T 字継ぎ手問題への適用

続いて，T 字継ぎ手の溶接について本開発手法で解析を行った．今回使用するモデルは，節点配置を不等間隔とした Fig.9 のようなモデルを用いた．節点配置の不等間隔モデルの計算には，最小座標軸長さを用いた節点参照が必要となり，以前の最小節点間距離による節点参照方法では参照節点数が膨大となり，計算が困難であった．しかし，溶接問題では溶接近傍部において，特に温度依存性や材料非線形などの影響が強くなるために，溶接近傍に節点を密に配置することは，溶接問題を扱う上で重要である．このため，本節では不等間隔モデルを用いた計算を行った．

計算モデルの節点配置としては，x, y, z 方向にそれぞれ 35 点，61 点，18 点の 16226 点とした．また，入熱条件としては入熱量 600(J/mm)，溶接速度 7(mm./s)，溶接時間 45(s)の片面溶接を行った．Fig.10 は x 方向の残留応力分布を示したものである．これによると溶接線近傍部において引張りの残留応力が発生しており，その最大応力は

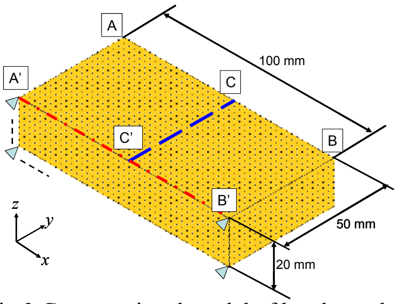

Fig.3 Computational model of bead-on-plate and analysis condition

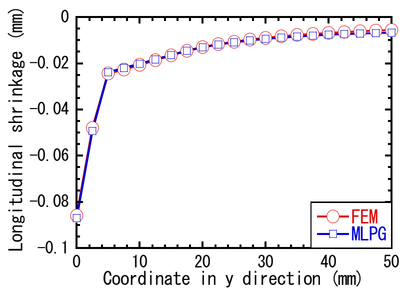

Fig.5 Comparison of longitudinal shrinkage between FEM and MLPG on top surface of A-B to A'-B'

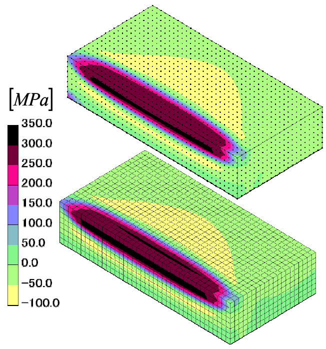

Fig.7 Stress distribution σ_x

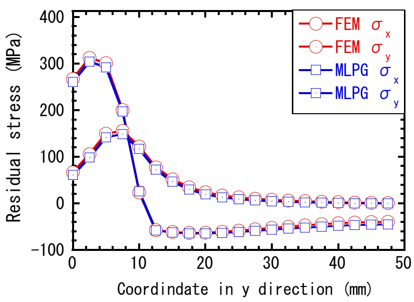

Fig.4 Comparison of residual stress of FEM with MLPG on top surface of transverse cross section

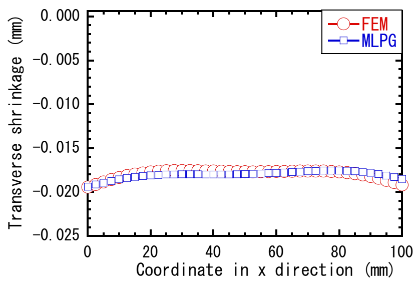

Fig.6 Comparison of transverse shrinkage between FEM and MLPG on top surface of A-A' to B-B'

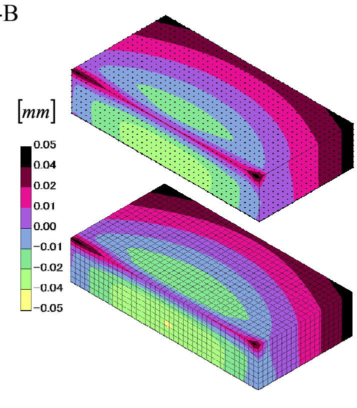

Fig.8 Displacement of z direction

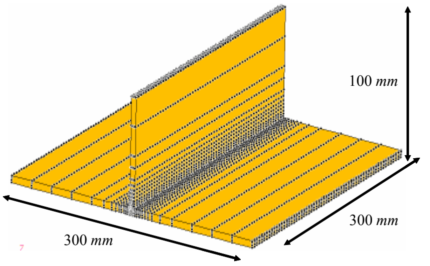

Fig.9 Numerical model of nodal point distributions of T welded joint and that of xy cross-section

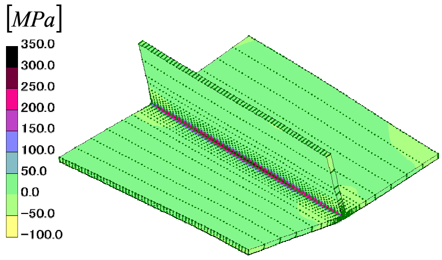

Fig.10 Distribution of residual stress in x direction

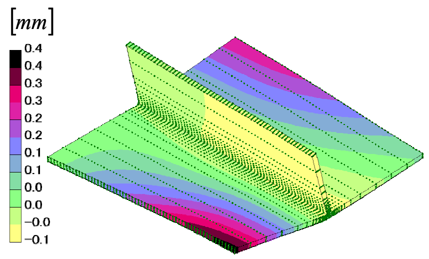

Fig.11 Distribution of displacement in z direction

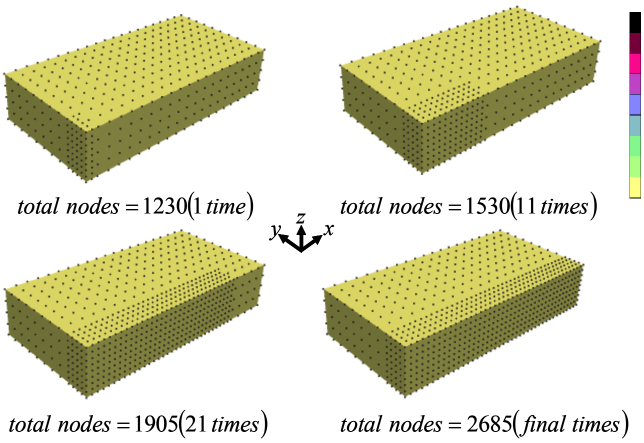

Fig.12 Computational model after adding nodes

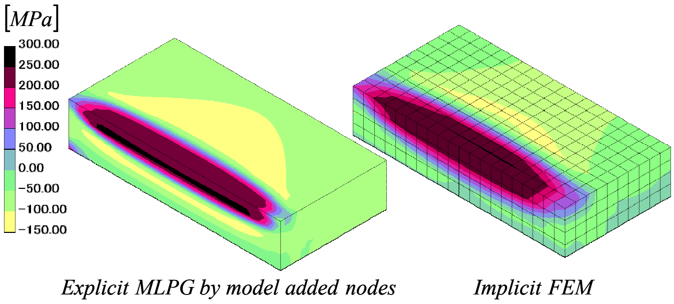

Fig.13 Distributions of residual stress in x direction

降伏応力程度の大きさとなっていることが確認できる．また，溶接終始端部においては冷却速度が速いために圧縮の残留応力が発生しており，定性的な溶接現象と良く一致している．これらの図から片面溶接を行った面に対して，中央の板が傾く様子を再現できていることが確認できる．また，Fig.11 には z 方向変位分布を示したものであり，片面溶接による角変形の傾向について再現できることを確認した．以上より，本開発手法を用いて 10000 節点を超える，不等間隔モデルの計算を十分に行うことが可能であることを示した．

3. 3 節点追加型解析手法

メッシュレス解析手法では，計算に要するプリプロセッシングが簡便であることは先に述べた．具体的には注目する節点が近傍節点のどの点を参照するかという，いわゆる節点参照情報のみで解析可能である．このために計算後に解析精度が不十分となる場合，精度不十分の領域に節点を追加することにより解析精度を向上することが可能となる．

本節ではビードオンプレート問題に対して，節点追加手法を適用した．今回計算に用いたモデルは，Fig.3 と同寸法のモデルに対して, 初期の節点配置を x, y, z 方向それぞれに対して，21,11,5 点の 1155 節点を節点間隔 5(mm) となるように配置した．この計算モデルの溶接線近傍領域に節点の追加を行う．節点追加方法としては，溶接近傍領域の節点間隔が 2.5(mm)になるように, 溶接トーチの通過に合わせて，合計 41 回の追加を行い，1 回ごとに 45 点もしくは 30 点追加を行い，合計 1530 点を追加する．Fig.12 に節点追加後のモデルを示す．それぞれ順に節点を 2，11，21，41 回目に節点を追加したときのモデルである．なお，解析に用いる温度分布は節点追加前モデルで熱伝導解析を行い，追加された節点の温度は MLS により内挿した値を用いる．また変位についても同様に内挿を行う．溶接条件として，溶接速度を 5(mm/s)および入熱量 1000(J/mm)とした．以上の条件より，得られた残留応力のコンタ図について，陰解法 FEM 解析結果と節点追加モデルを用いた陽解法 MLPG 解析結果を Fig.13 に示した．同図より，節点追加型解析は FEM 解析結果と良好に一致していることを確認した．

4. 結言

本研究では，メッシュレス法である MLPG 法を 3 次元溶接問題などの実溶接構造物問題に適用し，実用的な解析手法とするために必要となる解析理論について検討し，メッシュレス法の剛性マトリックスのスパース性の悪化について述べた．このため，全体剛性マトリックスの対角項のみを用い，スパース性の悪化を回避することが可能な陽解法理論の適用を試み，3D 陽解法熱弾塑性 MLPG 法の開発を行った．また，本開発手法を基礎的な溶接問題に適用した結果以下の知見を得た．

1) 過去のメッシュレス解析手法では困難であった．10000 節点を超えるような 3 次元の実用的な溶接問題の解析をすることが可能となった．
2) 陽解法 MLPG 法による残留応力，残留変形解析結果を陰解法FEM解析結果とほぼ同等の精度で解析を行うこと可能であることを示した．
3) 溶接線近傍部で非線形性の強い溶接問題において，特に重要となる溶接線近傍の節点を密にするような不均一に節点配置を行った T 字継ぎ手の計算モデルの解析についても十分に解析を行うことが可能であることを示した．
4) 実際に節点追加型の解析をビードオンプレート問題に適用して，溶接線近傍にのみ節点を追加した解析を行い，陰解法 FEM 解析の結果とその定性傾向は一致した．

参 考 文 献

1) GR Liu: Mesh free methods moving beyond the finite element method, 2009, CRC press