# B01 MLPG(メッシュレス)法を用いた溶接ビード止端部に働く応力集中の解析

有　村　翼　(指導教員　正岡・柴原)

Analysis for Stress Concentration of Weld Bead Toe using by MLPG Method

by　Tasuku Arimura

**Abstract**

Recently, the numerical computation method that uses the finite element analyses is widely used in various field of design and research. It is necessary to divide an analytical object into elements when the finite element analysis is used and analyzed. Therefore a lot of labors and time are required to work for element division. Since the elements are not necessary in the meshless method, the labor and time for the element division can be saved.　In this study, Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) method which is one of meshless techniques is used to analyze two dimensional elastic problems, and its usefulness is examined. The stress concentration of welding bead toe is analyzed as an application example.

## 1. 緒　言

現在、有限要素法を用いた数値計算法は、設計の際や研究の各分野において広く用いられている。有限要素法を用いて解析を行う場合、解析対象を要素に分割しなければならないが、解析対象が複雑な形状の場合、要素に分割する作業に多くの労力と時間を要する。これに対しメッシュレス法は要素を必要としないので、要素分割における労力と時間を節約することができる画期的な方法である。[1]メッシュレス法とは特定の手法を指すのではなく数多くの研究者が様々な手法を提案し独自の名前をつけているものの総称である。本研究では Atluri らによって提案された手法 [2]である MLPG(Meshless Local Petrove-Galerkin Method)についてその精度を検討した。MLPG 法は Galerkin 法に基づき解析の手順は有限要素法とほぼ同様である。両者の違いとして、一点は有限要素法では変位を内挿関数を用いて算出するのに対し MLPG 法では評価点周りの点の変位から移動最小二乗法により変位を近似的に求める点であり、もう一点は有限要素法は要素内で領域積分するのに対し MLPG 法では評価点近傍で積分を行う点である。本研究においては MLPG 法を用いた弾性解析法を独自に開発し、諸問題への適用を行った。まず、基礎試験への適用例として、円孔を有する帯板の引っ張り試験に適用することにより、本手法の妥当性について検討を行った。さらに十字継手における溶接ビード止端部の応力集中に対し適用し、本手法の有用性について検討を行った。

## 2. MLPG の解析理論

### 2.1 移動最小二乗法(MLS)

MLPG 法では，変位の近似関数の作成方法として一般的に移動最小二乗法(MLS)を用いる場合が多い。以下にその概要を示す。Fig.1 に示すように、物体の全体領域を $\Omega$ とし、全体領域 $\Omega$ 内の任意の評価点の近傍領域 $\Omega_S$ 内の節点変位を用いて、変位の近似関数 $u^h(x)$ を式(1)のように表す。

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{N} p_J(\mathbf{x}) a_J(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \text{for all} \quad \mathbf{x} \in \Omega_S \tag{1}$$

ここで、$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$=[ $p_1(\mathbf{x})$， $p_2(\mathbf{x})$， … ， $p_m(\mathbf{x})$ ]は以下のように定義される基底関数である。

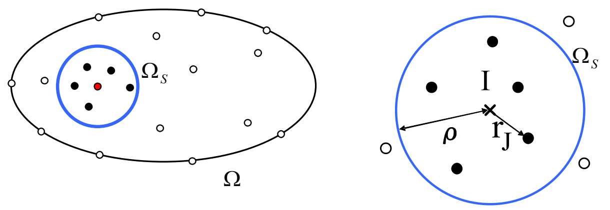
$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y] \qquad 1\text{ 次基底；m=3} \tag{2}$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \qquad 2\text{ 次基底；m=6} \tag{3}$$

また、$\mathbf{a(x)}$ は、以下の評価関数 $\mathbf{J}$ を最小化させるように決定される未定係数ベクトルである。

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \sum_{J=1}^{N} w(r_J)\left[\mathbf{p}^{\mathbf{T}}(\mathbf{x}_{\mathbf{J}})\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}^J\right]^2 \\ &= \left[\mathbf{Pa}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}\right]^T \mathbf{W}\left[\mathbf{Pa}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}\right]\end{aligned} \tag{4}$$

ここで、$w(r_J)$ は重み関数であり、$r_J$ は評価点と節点と




(a) global domain $\Omega$　　(b) local-subdomain $\Omega_S$

Fig.1 The global domain $\Omega$ and local-subdomain $\Omega_S$

の距離を示している。本研究では、重み関数として、以下に示すスプライン関数を採用した。

$$w(r_J)=\begin{cases}1-6\left(\dfrac{r_J}{\rho}\right)^2+8\left(\dfrac{r_J}{\rho}\right)^3-3\left(\dfrac{r_J}{\rho}\right)^4, 0\le r_J\le\rho \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r_J\ge\rho\end{cases} \tag{5}$$

また、$\hat{u}^1$、$\hat{u}^2$、…、$\hat{u}^N$ は、評価点の近傍領域内の節点の仮想変位を示している。$\mathbf{a(x)}$ を求め、式（1）に代入すると、内挿関数 $\mathbf{\Phi^T(x)}$ を含む $u^h(x)$ が導出される。

$$u^h(\mathbf{x})=\mathbf{\Phi^T(x)\hat{u}}=\sum_{J=1}^{N}\phi^{IJ}(\mathbf{x})\hat{u}^J \tag{6}$$

### 2.2 MLPG 法による応力解析

次に本研究で用いたメッシュレスによる応力解析法のひとつである MLPG5 についての説明を行う。物体の全体領域を $\Omega$、全体領域 $\Omega$ の境界を $\Gamma$ としたとき応力の釣り合い方程式および境界条件はそれぞれ以下の式(7)と式(8)で表される。

$$\sigma_{ij,j}+b_j=0 \qquad in \quad \Omega \tag{7}$$

$$\begin{cases}u_i=\bar{u}_i \qquad on \quad \Gamma_u \\ t_i=\sigma_{ij,j}n_j=\bar{t}_i \qquad on \quad \Gamma_t\end{cases} \tag{8}$$

ここで $\sigma_{ij}$ は応力テンソルであり、$b_j$ は体積力を示す。また境界 $\Gamma_u$ は強制変位を与える境界面であり、$u_i$ は節点 $i$ の変位で、$\Gamma_t$ は強制力を与える面であり $t_i$ は境界面の法線方向の応力を示す。式(7)を重みつき残差法により弱形式化表示し釣り合い式に境界条件を付与すると評価点近傍の積分領域 $\Omega_S$ において式(9)が得られる。

$$\int_{\partial\Omega_S}(\sigma_{ij,j}+b_j)v_i d\Omega-\alpha\int_{\Gamma_{Su}}(u_i-\bar{u}_i)v_i d\Gamma=0 \tag{9}$$

式(9)中の $v_i$ は重み関数である。ここで、部分積分 $\sigma_{ij,j}v_i=(\sigma_{ij,j}v_i)_{,j}-\sigma_{ij}v_{i,j}$ および、発散定理、式(8)を用いると、式(10)が得られる。

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_S}\sigma_{ij}v_{i,j}d\Omega-\int_{L_S}t_iv_id\Gamma-\int_{\Gamma_{Su}}t_iv_id\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}u_iv_id\Gamma \\ &=\int_{\Gamma_{St}}\bar{t}_iv_id\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}\bar{u}_iv_id\Gamma+\int_{\Omega_S}b_iv_id\Omega\end{aligned} \tag{10}$$

ここで、重み関数 $v(x)$ にヘビサイド関数を用いる。

$$v(x)=\begin{cases}1 \quad at \quad x\in\Omega_S \\ 0 \quad at \quad x\notin\Omega_S\end{cases} \tag{11}$$

式(11)より、ヘビサイド関数は $\Omega_S$ 内で一様なので $v_{i,j}=0$ を用いると、式(10)は次式のようになる。

$$\begin{aligned}&-\int_{L_S}t_id\Gamma-\int_{\Gamma_{Su}}t_id\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}u_id\Gamma \\ &=\int_{\Gamma_{St}}\bar{t}_id\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}\bar{u}_id\Gamma+\int_{\Omega_S}b_id\Omega\end{aligned} \tag{12}$$

ここで式(12)をマトリックス形式で書くと

$$-\sum_{J=1}^{N}\int_{L_S}\mathbf{NDB^J\hat{u}^J}d\Gamma-\sum_{J=1}^{N}\int_{\Gamma_{Su}}\mathbf{SNDB^J\hat{u}^J}d\Gamma+\alpha\sum_{J=1}^{N}\int_{\Gamma_{Su}}\mathbf{S\Phi^J\hat{u}^J}d\Gamma$$

$$=\int_{\Gamma_{St}}\bar{t}_id\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}\bar{u}_id\Gamma+\int_{\Omega_S}b_id\Omega \tag{13}$$

と表すことができる。このとき、の $\sum_{J=1}^{N}\mathbf{K_{IJ}\hat{u}^J}=\mathbf{f_I}$ 形 で整理すると、式(13)は

$$\mathbf{K_{IJ}}=-\int_{L_S}\mathbf{NDB^J}d\Gamma-\int_{\Gamma_{Su}}\mathbf{SNDB^J}d\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}\mathbf{S\Phi^J}d\Gamma \tag{14}$$

$$\mathbf{f_I}=\int_{\Gamma_{St}}\bar{t}_id\Gamma+\alpha\int_{\Gamma_{Su}}\bar{u}_id\Gamma+\int_{\Omega_S}b_id\Omega \tag{15}$$

となる。

## 3. 円孔を有する帯板の引張試験への適用

本節では本手法を円孔を有する帯板の引張試験問題に適用することにより手法の妥当性および精度検証を行う。

### 3.1 解析モデルおよび解析条件

長さ 360mm 幅 360mm 厚さ 1mm の正方形板の中央部に直径 20mm の円孔を有する場合を解析対象とする。MLPG5 法により、この円孔を有する帯板が一軸引張りを受ける場合の応力解析を行う。このとき、円孔の大きさは板幅に対して非常に小さいので、円孔周辺の応力状態は無限幅の円孔板周辺の応力状態とほぼ一致すると考えることができる。解析においては対称性を考慮して Fig.2 のように全体の 1/4 についての解析を行う。また、材料定数においてはヤング率を 210 (GPa)、ポアソン比を 0.3 とする。また、Fig.3 中に示す様に節点は応力集中の発生する円孔付近に多く分布させた。

### 3.2 解析結果

MLPG5 によって解析した結果を以下に示す。今回の解析では節点数を 1231 点とし、計算を行った。MLPG 法における解析結果に及ぼす影響が大きいパラメータとして、変位の近似関数を求める際に必要である評価点を中心とする影響領域の半径(SS, Support Size)と、応力の算出に必要な Local sub-domain と呼ばれる支配方程式の積分領域の半径(TS, Test Function Size)が挙げられる。そこで本研究では影響領域の半径は各節点ごとに可変にし、どの評価点においても影響領域内の節点数がほぼ同数となるようにした。また、積分領域の半径は、節点間距離が最も小さい値 d を基準としてその長さに対する比を用い、$d\times TS$(TS は実数)で表すことにする。また、MLS の基底関数を 2 次の関数とした。Fig.3 に Fig.2 中 $AA'$ の位置における $y$ 方向の応力 $\sigma_y$ の分布を理論値[3]と比較したものを示す。同図より円孔付近で応力集中が発生していることが確認できる。また影響領域内の節点数を変化させても理論値と良好に一致していることがわかる。次に Fig.2 中 $AA'$ での、y 方向応力分布の相対誤差を Fig.4 に示す。相対誤差は同図中の式であらわされる。式中の $N$ は x 軸上の節点数であり、$\bar{\sigma}_i$ は理論値であり、$\sigma_i$ は解析値をしめす。TS が 0.3～0.5 の間で解が安定しており十分解析可能な誤差であると考えられる。

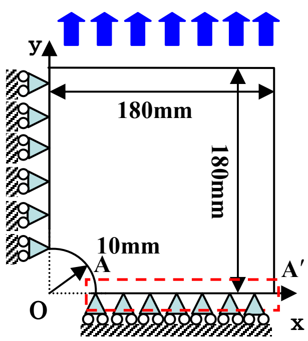


Fig.2 Analysis model

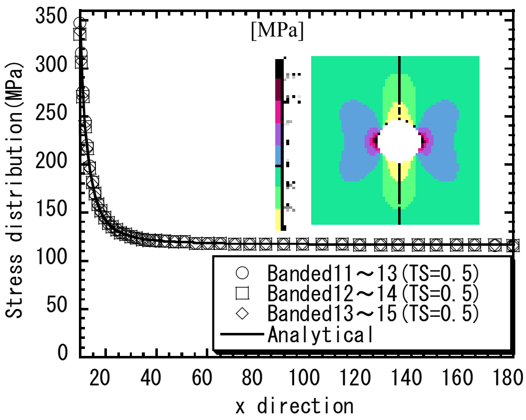



Fig.3 Stress distribution $\sigma_y$

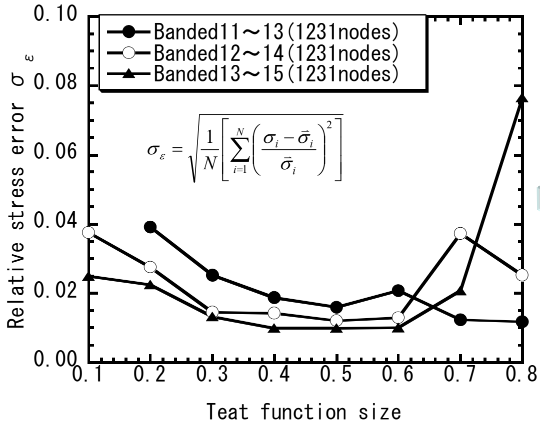



Fig.4 Relative Stress Error $\sigma_\varepsilon$

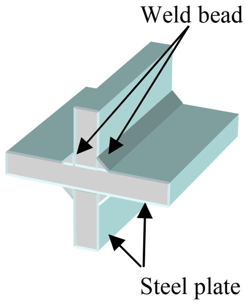



Fig.5 Schematic illustration of Welded Cruciform Joints

## 4. 溶接ビード止端部に働く応力集中の解析

就航後数年を経過した船舶において、波浪変動圧等繰り返し加重の作用により船底ロンジの船底外板との隅肉溶接部(ビード止端部)の一部に外板を貫通する亀裂が発生する危険性がある。よって、溶接ビード形状で応力集中を抑え、疲労強度の面での高い信頼性を確保する必要がある。そこで本研究では、溶接ビード止端部の応力集中をメッシュレス(MLPG)法を用いて解析、評価を行う。

### 4.1 解析モデルおよび解析条件

本節では Fig.5 に示すような十字継手に働く応力を MLPG 法で解析し、溶接ビード止端部に働く応力集中の評価を行う。ここでは、問題の対称性を利用し、1/4 モデルのみを用いて解析を行う。寸法および境界条件を Fig.6 に示す。ヤング率は 210(GPa)、ポアソン比を 0.3 とする。なお、荷重は強制変位で与えられており、x 方向への一軸方向引張となっている。節点は Fig.8 に示すように応力集中が発生すると予想されるビード溶接止端部付近に多く配置した。Fig.7 にフランク角と曲率半径の定義を示す。溶接ビード止端の曲率半径を $\rho$ とし、鋼板と溶接ビード部のなす角を $\theta$ とする。

### 4.2 解析結果

#### 4.2.1 曲率半径を変化させた場合

Fig.9 に Fig.6 中 B において強制変位を 0.01mm 与えた場合における x 方向の応力分布を示す。同図におけるフランク角は 135° 曲率半径は 2.41mm である。同図よりビード止端部において応力集中が発生していることがわかる。また、ビード止端部から十分離れた位置では応力が一様になっており、応力集中による影響はないと考えられる。Fig.10 にビード止端部付近における x 方向応力分布を示す。ビード止端部の曲率半径 r が大きくなるに従い、ビード止端部の応力集中が解消されていることが確認できる。次に応力集中状態について評価する。

ビード止端部では、局部的応力集中が発生するため、精度のよい解を求めるには応力集中部に非常に多くの節点を配置する必要がある。また、亀裂先端のような構造的な特異点においては、応力が無限大になることが報告されている。そのため、応力集中部の応力値のみで評価することは難しい。そこで本研究では応力特異性指数で評価する。応力特異性指数とは、応力集中部における構造的な特異性の強度を表す指標であり、応力は亀裂先端からの距離を r とおくと、応力は以下の式で表す事ができる [4]。

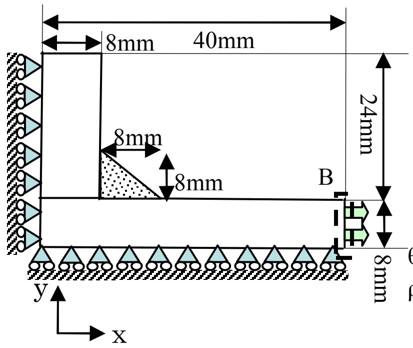



Fig.6 Analysis model

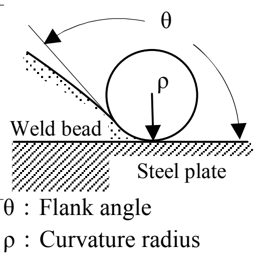



Fig.7 Flank angle and curvature radius

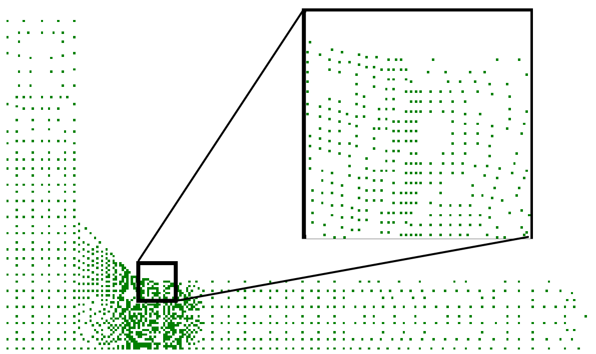


Fig.8 Distribution of nodes

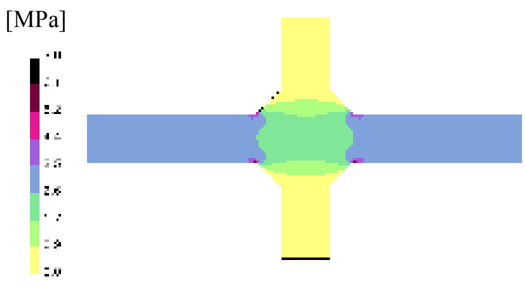



Fig.9 Stress distribution $\sigma_x$

$$\sigma(r) = K * r^{-n} \tag{16}$$

ここで K は応力拡大係数であり、n が応力特異性指数であり、応力集中の度合いをあらわす。例えば亀裂先端のように特異性の強い応力場の場合には応力特異性指数は 0.5 となり、特異性が弱い場合にはこの値が小さくなる。また、この指数は負荷形態によらないため、容易に応力

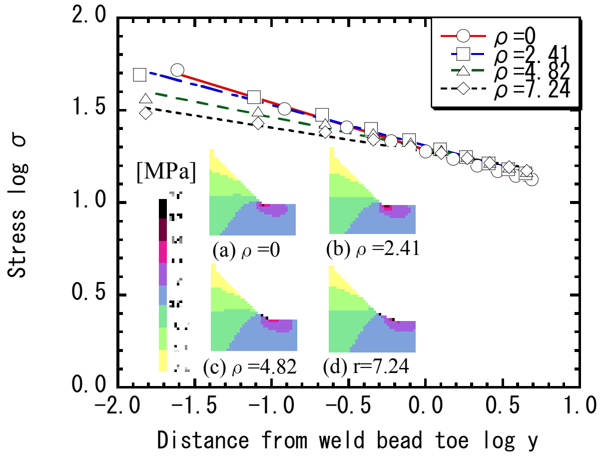



Fig.10 Stress and direction from crack tip

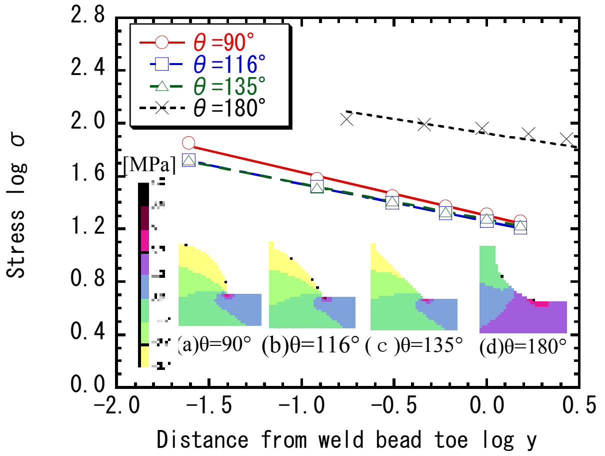



Fig.12 Stress and direction from crack tip

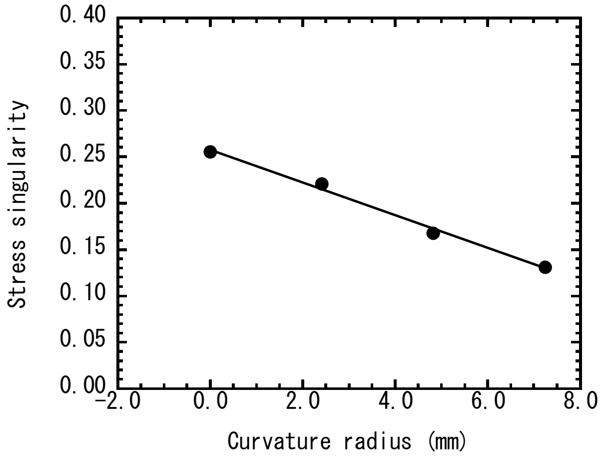



Fig.11 Stress sigularity

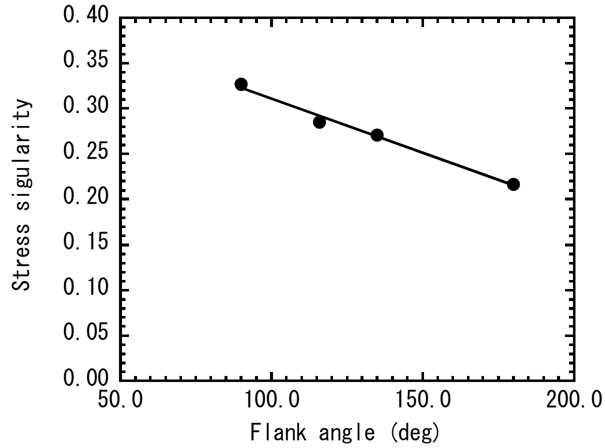



Fig.13 Stress sigularity

集中の評価が可能となる。式(16)の両辺の対数をとると

$$\log\sigma(r) = \log K - n\log r \tag{17}$$

となり、$\log\sigma(r)$ と $\log r$ の関係が傾き-n の直線の式で表される。このとき $\log\sigma(r)$ 切片から応力拡大係数 $K$ を求めることができる。この応力拡大係数で応力集中を評価する報告もあるが、応力拡大係数は負荷状態に強く依存するので本項においては応力特異性指数により評価した。Fig.10 にビード止端部の曲率半径 r が異なる場合における応力分布を示す。横軸には応力特異点からの距離を示している。Fig.11 に応力特異性指数と曲率半径 r の関係を示す。同図より曲率半径 r が小さいほど応力特異性指数 n は大きくなっている。このことは応力集中が大きいことを意味しており、亀裂の発生につながりやすいと考えられる。

**4.2.2 フランク角を変化させた場合**

次にフランク角を変化させた場合における、溶接ビード止端部付近の応力分布を Fig.12 に示す。横軸、縦軸は Fig.10 の場合と同様とした。この結果より、どのケースにおいても、溶接ビード止端部において応力集中が発生していることがわかる。また、Fig.13 に応力特異性指数とフランク角の関係を示す。同図より、フランク角が小さいほど応力特異性指数は大きくなっていることがわかる。このことは応力集中が大きいことを意味しており、亀裂の発生につながりやすいと考えられる。

## 5. 結　　言

本研究ではメッシュレス(MLPG)法を円孔を有する帯板の一軸方向引張問題に適用しその精度を検証した。さらに溶接ビード止端部に働く応力集中の解析に適用した。本研究で以下の知見が得られた。

1) MLPG 法による応力解析が実用上十分な精度で解析できることを確認した。
2) 溶接ビード止端部において、曲率半径が小さいと応力集中が大きくなる。またフランク角が小さい場合においても応力集中が大きくなることがわかった。

## 参考文献


1) 岡本伸吾，宮口幸人，乾道：MLPG 法で用いられるサポート半径と重み関数の検討と棒の静・動力学解析，日本計算工学会，2003
2) H.Lin，S.N.Atluri：Meshless Local Petrov-Galarkin （MLPG）Method for Convection-Diffusion Problems, CMES，Vol.1，No.2
3) 西田正孝：応力集中,森北出版社,1967
4) 目時学，立野昌義，小久保邦雄：接合強度と応力特異性指数の界面端形状依存性，日本器械学会関東支部ブロック合同講演会－2004　宮代－講演論文集

就航後数年を経過した船舶において、波浪変動圧等繰り返し加重の作用により船底ロンジの船底外板との隅肉溶接部(ビード止端部)の一部に外板を貫通する亀裂が発生する危険性がある。よって、溶接ビード形状で応力集中を抑え、疲労強度の面での高い信頼性を確保する必要がある。そこで本研究では、溶接ビード止端部の応力集中をメッシュレス(MLPG)法を用いて解析、評価を行う

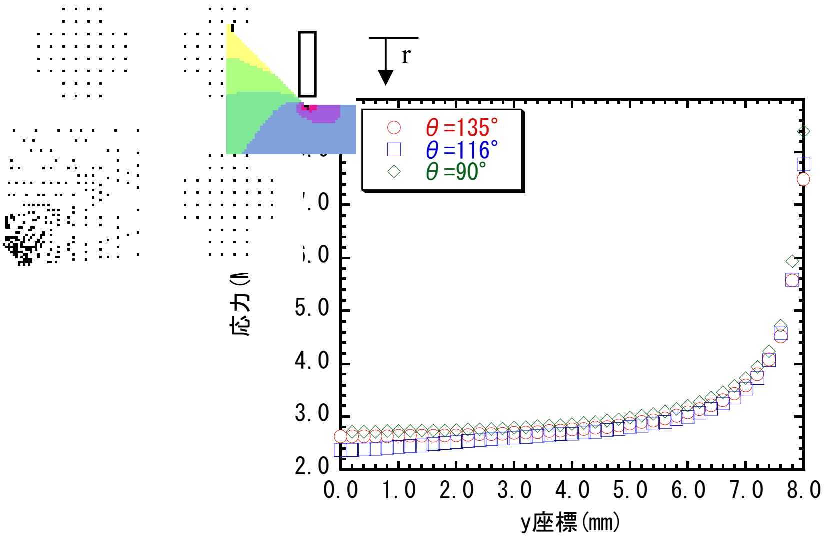



Fig.

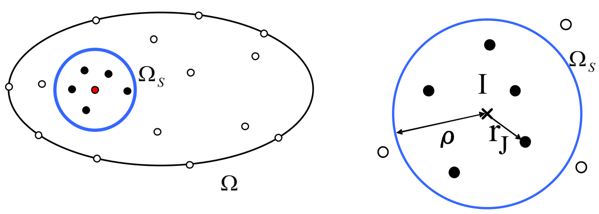



Fig.1 The global domain $\Omega$ and local-subdomain $\Omega_S$