

B16 MLPG 法による熱弾塑性解析法の開発と溶接問題への応用

堀 友 則

(指導教員：正岡孝治、柴原正和)

Development of Thermal Elastic Plastic Analysis using Meshless Local Petrov-Galerkin Method and the Application for Welding Problem

by Tomonori Hori

Abstract

A meshless local Petrov-Galerkin method(MLPG) for the analysis of the thermal elastic-plastic problem is presented in this paper. The advantages of meshless method are that no element connectivity and no remeshing are required in pre and post processing. The MLPG method uses the moving least squares (MLS) to approximate the field functions and the Heaviside step function as the test function of the weighted residual method in each sub-domain. The advantage of this method is to avoid the need for a domain integral and only needs to integrate the local boundary, if body force is ignored. In the formulation of plasticity theory, flow theory is adopted. It is suitable to solve problems under complex loading conditions involving unloading. As a numerical example, the present method is applied to simulate the bead on plate welding in order to consider the influence of specific parameters related to MLPG parameters. The results with those parameters show that the welding deformations and the residual stress distributions along welding line have a good agreement with those of FEM. These observations show that the proposed method is valid and useful for the solution of the welding problem.

1. 緒 言

現在、数値計算による構造解析手法として、最も発展し、用いられている解析手法に有限要素法(Finite Element Method 以下 FEM)がある。FEM を用いて解析を行う場合、解析対象を要素に分割する必要があるが、解析対象の形状および力学現象等により、最適な要素分割は異なり、経験に依存するところが大きい。

そこで、本研究ではメッシュレス法のひとつである MLPG(Meshless Local Petrov-Galerkin)法を用いた構造解析手法に注目した。MLPG 法では解析に要素分割を全く使用せず、要素・節点間におけるコネクティビティ情報が不要となるため、プリプロセッシング時間の大大幅な縮小が期待できる。さらに、再解析のために要素再分割を行う必要がないということも利点として挙げられる。これまでに、MLPG 法を用いた、構造解析では、大変形解析¹⁾、熱弾性解析²⁾、弾塑性解析³⁾などが実施されている。本研究では、新たに MLPG 法を用いた溶接構造解析手法を確立することを目的とし、MLPG 法による熱弾塑性解析手法の開発を行い、本解析手法の基礎的特性を示すために溶接継ぎ手問題に対して本手法を適用・検討した。

2. MLPG 法による熱弾塑性解析理論

2.1 内挿関数の作成

メッシュレス法では、点ごとに内挿関数を作成するので、注目する局所領域における点と点の間の物理量を補間する必要がある。このとき、良く用いられる手法として、移動最小二乗近似 (Moving Least Square Approximation 以下 MLS) がある。以下にその概要について示す。

ある領域 Ω 内における任意の評価点の位置ベクトルを \mathbf{x} 、近似関数を $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ とすると次式のように表される。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$ は基底関数であり 2 次元解析においては以下のようないものを用いる。

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y\} \quad 1 \text{ 次基底 : } m=3 \quad (2)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1, x, y, x^2, y^2, xy\} \quad 2 \text{ 次基底 : } m=6 \quad (3)$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ は未定係数ベクトルであり評価関数

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^N w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}_i]^2 \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [\hat{\mathbf{u}}^1, \hat{\mathbf{u}}^2, \dots, \hat{\mathbf{u}}^N] \quad (5)$$

を最小化することによって決定する。 $\hat{\mathbf{u}}_i$ は座標 \mathbf{x}_i における見かけの節点物理量、 Ω_s^i は各節点がもつ影響領域、 ρ_i は影響領域の半径、 $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ は節点 i を含む影響領域 Ω_s^i 内における重み関数である。本解析において影響領域に Fig.1 のような円を用いている。N は $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \neq 0$ となる影響領域内に含まれる節点の個数を表す。

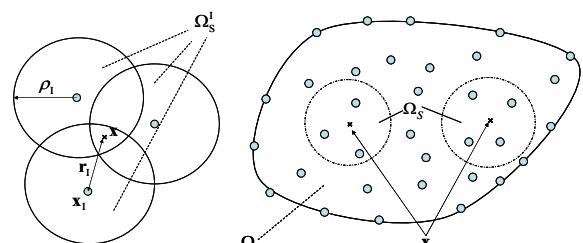


Fig.1 Support domains which are related to the points of interest.

重み関数としては、4次のスプライン関数を用いている。式(4)の停留値から次の関係が得られる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{u}} \quad (7)$$

ここで $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ は以下のように表される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1 \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2 \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_N \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)] \quad (9)$$

式(9)を $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ について解くと、以下で表す近似関数が得られる。

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi^i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}^i \quad (10)$$

以上の式から得られた、以下の式が本MLPG法で用いる内挿関数となる。

$$\phi^i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})]_{ji} \quad (11)$$

2.2 MLPG法熱弾塑性解析理論の定式化

本節においては、本研究において開発した、熱弾塑性MLPG法理論の概要について示す。

時刻 t における解析対象の全体領域 Ω 、境界を Γ としたとき応力の釣り合い方程式および境界条件は

$${}^t\sigma_{ij,j} + d\sigma_{ij,j} + {}^t b_j + db_j = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (12)$$

$${}^t u_i + du_i = {}^t \bar{u}_i + d\bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_u \quad (13)$$

$${}^t t_i + dt_i = {}^t \bar{t}_i + d\bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_t \quad (14)$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 b_j は体積力、 Γ_u は基本境界条件を与える境界面であり、 u_i は節点 i の変位、 Γ_t は自然境界条件を与える境界面である。また、 t_i は以下で示すような境界面の法線方向の応力である。

$$t_i = {}^t \sigma_{ij} n_j, \quad dt_i = d\sigma_{ij} n_j \quad (15)$$

式(12)に対して、重み付残差法を用いて弱形式化する。また、ペナルティ法により基本境界条件を付与すると評価点近傍の積分領域 Ω_S において式(16)となる。

$$\int_{\Omega_S} ({}^t \sigma_{ij,j} + d\sigma_{ij,j} + {}^t b_j + db_j) v_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} ({}^t u_i + du_i - {}^t \bar{u}_i - d\bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \quad (16)$$

v_i は重み関数(test function)、 α はペナルティ係数を表し $\alpha > 1$ である。次に式(16)に対して、次の関係式を用いる。

$$\sigma_{ij,j} v_i = (\sigma_{ij,j} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j} \quad (17)$$

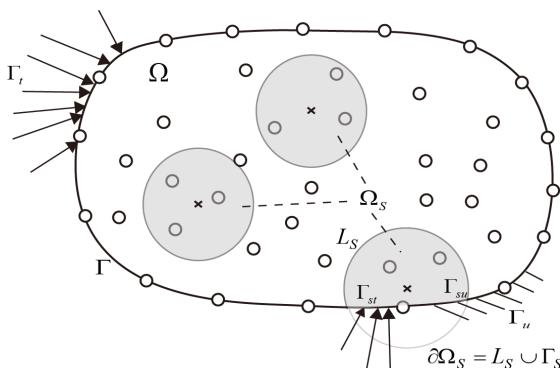


Fig.2 Schematic illustration of MLPG method

式(17)と自然境界条件を式(16)に適用すると

$$\begin{aligned} & \int_{L_S} ({}^t t_i + dt_i) v_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{st}} ({}^t \bar{t}_i + d\bar{t}_i) v_i d\Gamma - \int_{\Omega_S} ({}^t \sigma_{ij,j} + d\sigma_{ij,j}) v_{i,j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_S} ({}^t b_i + db_i) v_i d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} ({}^t u_i + du_i - {}^t \bar{u}_i - d\bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

本研究において test function にヘビサイド関数を用いる。

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{at } x \in \Omega_S \\ 0 & \text{at } x \notin \Omega_S \end{cases} \quad (21)$$

Ω_S 内において、ヘビサイド関数は一定なので、 $v_{i,j} = 0$ となる。これを式(20)に適用し、式(15)を用いると

$$\begin{aligned} & \int_{L_S} d\sigma_{ij,j} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} du_i d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}} ({}^t \bar{t}_i + d\bar{t}_i) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_S} ({}^t b_i + db_i) d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} ({}^t \bar{u}_i + d\bar{u}_i) d\Gamma - \int_{L_S} {}^t \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^t u_i d\Gamma \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、式(22)を行列・ベクトル形式に書き直す。

$$\begin{aligned} & \int_{L_S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{d} \sigma d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{d} \mathbf{u} d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}} {}^{t+dt} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_S} {}^t \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^{t+dt} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{L_S} \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{\sigma} d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^t \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

熱弾塑性解析理論は材料の温度依存性と非線形性を考慮するために、増分型の構成式を用いる。本研究においては、金属の溶接問題を取り扱うので、降伏条件に Von Mises の降伏条件を用いた。また、塑性ひずみ増分は、降伏関数の応力成分の微係数に比例する流れ理論による。

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} d\boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{g} dT \quad (25)$$

ただし、 $d\boldsymbol{\epsilon}$ は全ひずみ増分、 dT は温度増分を表し、 \mathbf{D} と \mathbf{g} は弾性域において

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e, \quad \mathbf{g} = \mathbf{D}^p \left(\mathbf{a} - \frac{dE}{dT} \frac{1}{E} \mathbf{D}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (26)$$

塑性域においては以下のものを用いる。

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^p, \quad \mathbf{g} = \mathbf{D}^p \left(\mathbf{a} - \frac{dE}{dT} \frac{1}{E} \mathbf{D}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \right) - 2\sigma_Y H^T \mathbf{D}^e \boldsymbol{\phi} / S \quad (27)$$

変位増分ベクトルはMLSにより得られる内挿関数を用いて以下のように表される。

$$\mathbf{d}\mathbf{u}^{hJ}(x) = \begin{Bmatrix} du_1^h \\ du_2^h \end{Bmatrix}^J = \begin{Bmatrix} \phi^J & 0 \\ 0 & \phi^J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\hat{u}_1 \\ d\hat{u}_2 \end{Bmatrix}^J = \boldsymbol{\Phi}^J d\hat{\mathbf{u}}^J \quad (28)$$

式(24)に式(25)を代入する。また、式(28)の関係を用いて、

$$\begin{aligned} & \int_{L_S} \mathbf{n}^t \mathbf{D} \mathbf{B}^J d\hat{\mathbf{u}}^J d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{S} \boldsymbol{\Phi}^J d\hat{\mathbf{u}}^J d\Gamma = - \int_{\Gamma_{st}} {}^{t+dt} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ & - \int_{\Omega_S} {}^t \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^{t+dt} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma - \int_{L_S} \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{\sigma} d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^t \mathbf{u} d\Gamma + \int_{L_S} \mathbf{n}^t \mathbf{g} dT d\Gamma \end{aligned} \quad (29)$$

τ は収束計算により、残差力が十分に小さいときの値である。

$$\sum_{J=1}^N \tau \mathbf{K}_{IJ} d\hat{\mathbf{u}}^J = d\mathbf{f}_I^0 + d\mathbf{f}_I^1 + d\mathbf{f}_I^2 \quad (30)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tau \mathbf{K}_{IJ} &= \int_{L_S} \mathbf{n}^t \mathbf{D} \mathbf{B}^J d\hat{\mathbf{u}}^J d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{S} \boldsymbol{\Phi}^J d\hat{\mathbf{u}}^J d\Gamma \\ d\mathbf{f}_I^0 &= - \int_{\Gamma_{st}} {}^{t+dt} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega_S} {}^t \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^{t+dt} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \\ d\mathbf{f}_I^1 &= - \int_{L_S} \mathbf{n}^t \cdot \mathbf{\sigma} d\Gamma - \alpha \int_{\Gamma_{su}} {}^t \mathbf{u} d\Gamma \\ d\mathbf{f}_I^2 &= \int_{L_S} \mathbf{n}^t \mathbf{g} dT d\Gamma \end{aligned}$$

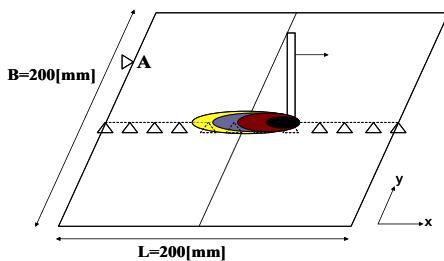


Fig.3 Bead on plate model

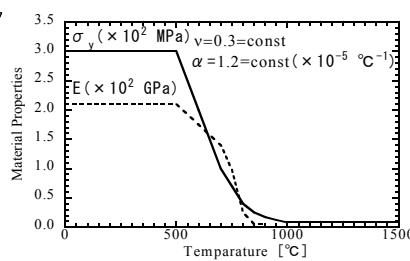


Fig.4 Temperature dependent material property

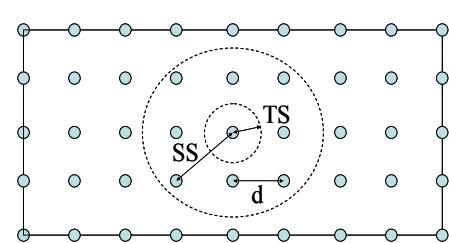


Fig.5 Geometrical Parameters of MLPG

3.MLPG法による溶接変形・残留応力解析

3.1 解析モデル

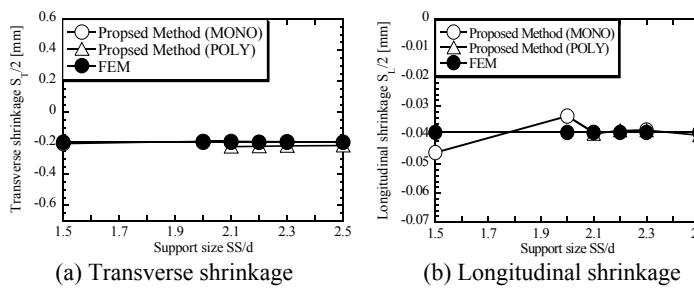
Fig.3に本章に用いた解析モデルを示す。板厚方向に平面応力状態を仮定し、境界条件については図に示した通りで、対称線上の全節点のy方向変位を拘束およびA点にx方向変位を一点拘束する。今回用いたモデルに対する節点分布として、節点数は861で、板長方向に41点、板幅方向に21点で均一な節点分布となっている。

溶接条件は、入熱量105[J/mm]、溶接線速度v=5[mm/s]、熱効率0.7とし、平板表面における熱伝達の影響を考慮する。また、Fig.4に材料定数の温度依存性を示す。

3.2 MLS 影響領域の最適値検証

Fig.5に示す、MLPG特有のパラメータである影響領域半径(Support size以下SS)と積分領域半径(Test function size以下TS)がある。dは節点間の距離を表す。SSの大きさが異なると、各積分領域において得られる内挿関数の性質が異なるため、積分精度に大きく影響を与える。

TSは、その大きさが小さすぎると、Collocation methodのような強形式で解析することに近い状態になることが知られている⁴⁾。これは領域というより点で解析する状態に近くなるためである。本解析においては、節点間の距離dは均一な節点分布のため一定でTSは0.6d付近の値を用いて解析を行っている。以上の条件のもとで、内挿関数作成に用いる基底ベクトルの1次基底(MONO)および2次基底(POLY)それぞれについて、SSとFig.6に示すような、横収縮、平均縦収縮について、FEMによる解析結果と比較・検討を行った結果をFig.7に、残留応力分布について、その結果をFig.8に示す。



(a) Transverse shrinkage (b) Longitudinal shrinkage

Fig.7 The Influence of Support size (SS)

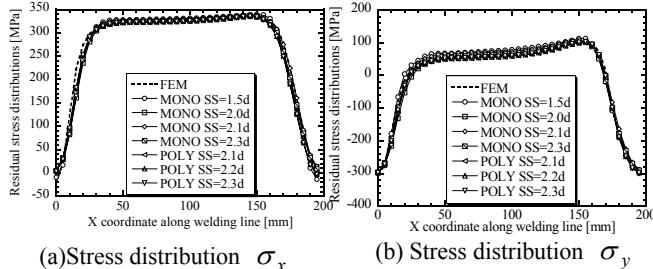
(a) Stress distribution σ_x (b) Stress distribution σ_y

Fig.8 Residual stress distributions on welding line

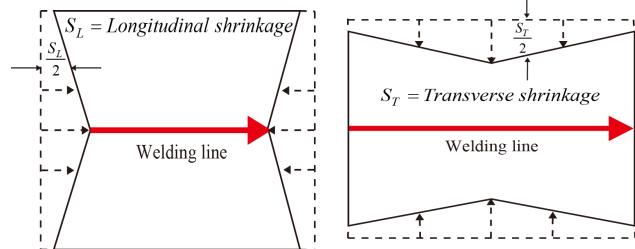


Fig.6 Two types of in-plate deformation mode

横収縮については、SSの大きさにかかわらず、FEMによる解析結果と良好に一致することが確認できた。一方で、縦収縮はSSの大きさが小さい範囲においては、FEMによる解析結果と比べてずれがある。しかし、SSが2.1d以上の値を用いるとき、FEM解析結果とほぼ完全に一致することが確認できる。溶接線近傍における溶接線方向の残留応力 σ_x は、MLPG、FEMとともに降伏応力に近い値となっており、SSの大きさにかかわらず、良好に一致していることが確認できる。 σ_y についてもFEM解析結果と非常に合っていることがわかる。以上結果から、本提案手法を用いて、解析を行うとき、溶接変形、残留応力が共に、FEM解析結果と良好に一致するのは、SSが2.1d以上を用いた場合である。

3.3 入熱量の影響

本節では3.2節において、FEM解析と良好に一致したMLPGパラメータSS=2.1~2.3dを用いて、各種溶接条件における解析結果の検証を行う。

溶接線速度3[mm/s]で一定とし、単位長さの溶接線に与えられる入熱量98[J/mm]、140[J/mm]、168[J/mm]、210[J/mm]、280[J/mm]のそれぞれについて解析を行い、横収縮、平均縦収縮を求め、FEMによる解析結果と精度比較を行った。また、溶接線方向残留応力について、入熱量280[J/mm]のときの分布を示している。Fig.9、Fig.10に、それぞれの結果を示す。

入熱量が大きくなるにつれて、溶接変形が大きくなるので、一般に解析は難しくなるが、Fig.9からわかるように、2次基底を用いた解析においては、FEMによる解析結果と良好に一致していることがわかる。一方、1次基底関数を用いた解析結果に関しては、横収縮量については定性的にも定量的に良好に一致している。しかし、縦

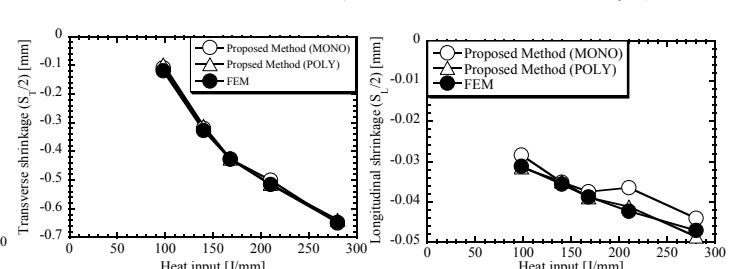


Fig.9 Influence of heat inputs on welding deformation

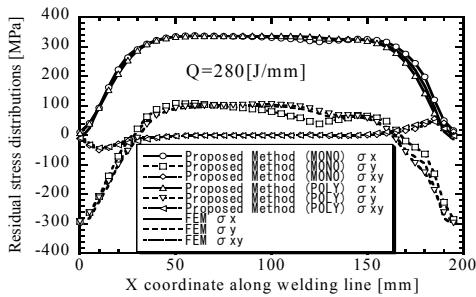


Fig.10 Residual stress distributions on welding line

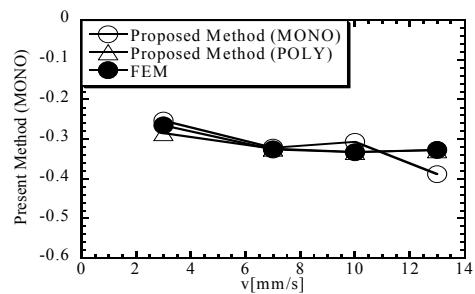


Fig.12 Transverse shrinkage in case of influence of welding speeds

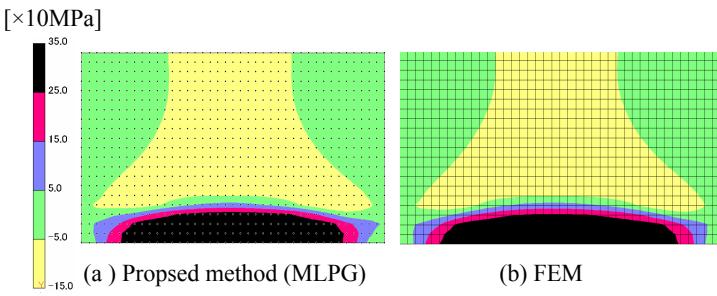
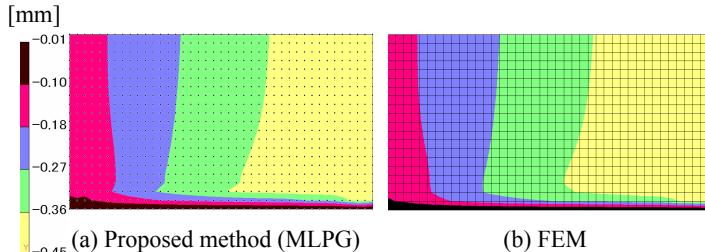
Fig.11 The accuracy of stress distribution σ_x 

Fig.12 The accuracy of deformation distribution in y direction

収縮に関して、入熱量の増大と共に増加する傾向は両者で一致するがやや大きめな値となっている。残留応力分布については、Fig.10から、2次基底を用いた解析においては、FEM 解析結果と良好に一致している。一方で、1次基底による解析で $x=125[\text{mm}]$ 付近の y 方向応力の分布がやや小さく表れているが、その分布傾向は一致している。また、 x 方向応力、せん断応力については FEM 解析結果と良好に一致していることがわかる。

次に、MLPG 法による解析が解析領域全体においても十分な解析が行えていることを示すために、解析領域全体のコンター図を示す。Fig.11 は x 方向応力分布図、Fig.12 は、 y 方向変位を示している。FEM 解析と MLPG 法による解析結果を比較すると、変位、応力共に、両者の分布形状および、定量的な分布についても、ほぼ一致していることが確認できる。

3.4 溶接速度の影響

本節においても 3.3 節と同様に、 $SS=2.1 \sim 2.3d$ を用いて、次の溶接条件において解析を行う。入熱量 $Q=126[\text{J/mm}]$ で一定のもとで、溶接速度 $v=3, 7, 10, 13[\text{mm/s}]$ のときの溶接変形・残留応力について評価を行う。溶接速度が速くなるほど、トーチの通過時間が短くなるので、熱伝導しにくくなり、温度増分が大きく解析が難しくなる。Fig.12 には、横収縮および、溶接速度 $13[\text{mm/s}]$ のときにおける残留応力分布を示している。

横収縮に関して、Fig.12 からわかるように、2次基底関数を用いた解析において、横収縮は、溶接速度の速さにかかわらず、FEM 解析の結果と良好に一致していること

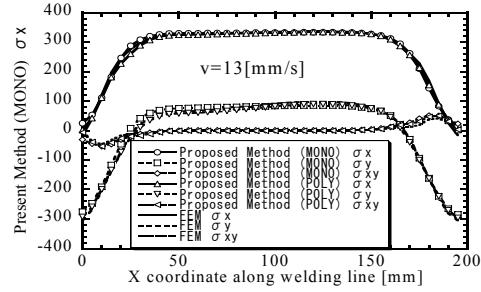


Fig.13 Residual stress distributions in case of influence of welding speed on welding line

がわかる。一方で、1次基底関数に関しては、 $v=13[\text{mm/s}]$ のときにおける横収縮の解析結果が他の解析結果よりも大きい、しかし、他の溶接速度においては、定量的に、ほぼ一致している。残留応力分布については、1次基底、2次基底共に、溶接始端部、および終端部においても FEM 解析結果と良好に一致していることが確認できる。

4.結言

本研究において、新たに、MLPG 法による熱弾塑性解析法の開発を行い、基本的な溶接継手問題に適用し、FEM 解析結果と比較して以下の知見を得た。

- 1) 本提案手法を用いることにより、溶接変形、残留応力の解析を実用上十分な精度で解析することが可能であることを確認した。
- 2) MLPG 法による解析において、重要なパラメータの一つである、影響領域 SS について最適値を求めた結果、本解析条件においては、 $2.1d$ 以上を用いるとき FEM 解析と良好に一致することを確認した。
- 3) 入熱量や溶接速度といった溶接条件の違いにかかわらず、最適な影響領域 SS、および、MLS 基底関数を用いることにより、FEM 解析とほぼ同等の結果を得ることができるることを確認した。

参考文献

- 1) Ching H.K, Chen J.K. : Thermomechanical analysis of functionally graded composites under laser heating by the MLPG method, CMES, vol13, 2006, pp.199-217
- 2) Han Z.D, Rajendran A.M, Atluri S.N. : Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) approaches for solving nonlinear problems with large deformations and rotations, CMES, vol10, 2005, pp.1-12
- 3) Long S.Y, Liu K.Y, Li G.Y. : An Analysis for the Elasto-Plastic Fracture Problem by the Meshless Local Petrov-Galerkin Method, CMES, vol28, 2008, pp.203-216
- 4) Liu G.R, Gu Y.T. : An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming, 2005, Springer