

# M03 デジタル画像相関法を用いた超弾性体の応力計測法の開発

大平 紘敬 (指導教員 柴原正和)

Development of Stress Measurement Method for Hyper-elastic Material Using Digital Image Correlation

by Hironori Ohira

## Abstract

Hyper-elastic materials are difficult to analyze stress and strain distribution using FEM. Since rubber has complicated mechanical characteristics which are material nonlinearity, geometric nonlinearity, viscoelasticity and temperature dependency, it is very important to investigate the details of mechanical characteristics by measurement. In this study, stress measurement system for hyper-elastic material using digital image correlation technique, which can measure in non-contact and full visual field, is developed. This system includes strain calculation using large deformation theory and stress calculation using strain energy density function. This system was applied to tensile test using rubber test specimen with crack. And, measuring forces are compared with the experimental external force for validation. In addition, this system is applied to the contact test, and the stress distribution is also measured.

## 1. 緒 言

超弾性体<sup>1)</sup>とは大変形が可能で荷重を取り除くとほぼ元の状態に戻るという力学的な特徴を持つ物体であり、高分子材料のゴム材料や、人体の筋肉、網膜などの生体軟組織がそれにあたる。特にゴム材料は浮標ブイを係留するラバージョイナー、船の係留施設における防舷材、車のタイヤなどに用いられるなど各工業分野において多種多様な用途で使用されている。そのため、ゴム材料は様々な研究者によって FEM 解析が行われているが、非常に解析が難しい材料として知られている。その理由として、超弾性体であるため、数百パーセントのひずみが発生する変形の際に、応力-ひずみ関係が非線形となる材料非線形性、また、大変形による幾何学的非線形性などが存在するためである。更に、厳密な解析を行うには、粘弾性、温度依存性などを考慮しなければならないということもあり、き裂進展メカニズム、摩擦・磨耗メカニズム、補強メカニズムなど、明らかにされていない力学特性が多く存在する。そのため、新たなゴム材料の開発には、材料特性および力学特性の把握は非常に重要であると考えられる。

そこで本研究では、撮影範囲に対して全視野的な計測が可能であるという特徴を持つデジタル画像相関法<sup>2)</sup>を適用し、変形・ひずみおよび、応力計測手法の開発を目的とする。

まず、数百パーセントのひずみが生じるような大変形時でも変形計測を可能とするために、連続画像を使用して解析を行う増分加算型変形計測法の開発を行った。次に、幾何学的非線形性を表現するために、大変形項を考慮したひずみ算出式を用い、材料非線形性としてはひずみエネルギー密度関数を用いることでひずみ・応力計測システムの構築を行った。構築したシステムをき裂を有するゴム材料の引張り試験へ適用し、本システムにより計

測された力と実際の試験力との比較を行うことで妥当性の検証を行った。更に、応用として実際のタイヤの現象に近いゴム材料と単突起との接触試験への適用を行い、得られた応力計測結果に関する考察を行った。

## 2. デジタル画像相関法を用いた変形・ひずみ・応力計測システム

本システムは、変形中の連続画像を用いて、増分加算型変形計測法により変位量を算出し、大変形項を考慮したひずみ式、ひずみエネルギー密度関数を適用することで非接触かつ全視野にわたる応力を計測するものである。次節以降に本システム各々の理論に加えて、ひずみエネルギー密度関数の同定法について説明を行う。

### 2.1 増分加算型変形計測法

本手法は、撮影した画像を時系列に沿って並べ、連続する 2 枚の画像にデジタル画像相関法を適用することにより、各画像間の変位増分 $\{\Delta u\}$ を追跡しながら算出し、変形を計測したい画像までの変位増分を全て足し合わせることで変位量を得る手法である。この手法を用いれば、画像照合を行う画像同士は大きく変化せず、特別な補正なしに照合を行うこと無く大変形計測が可能となる。また、連続画像を使用しているため、変形挙動の計測も可能となる。

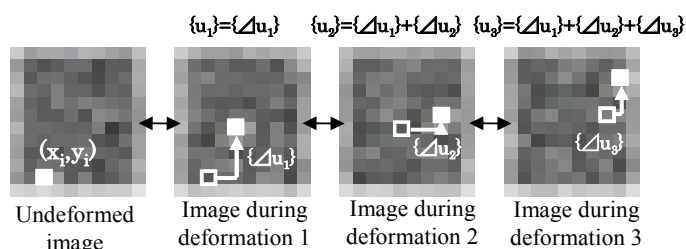


Fig.1 Incremental type measurement method.

## 2.2 大変形項を考慮したひずみ算出

ゴム材料のような柔軟な材料のひずみ解析では、大変形に伴う幾何非線形性を考慮する必要がある。幾何学的非線形性とは構造体の大変形により生じる非線形であり、例えば梁の大たわみのように局部的には小さなひずみしか生じていないのに全体としては大きな回転を伴う場合などに生じる。この幾何非線形性を正しく取り扱うために、本研究では式(1)に示す大変形項を考慮した式を用いて、x 方向、y 方向、xy せん断ひずみの算出を行う。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

また、式(2)より主ひずみの算出を行う

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_x)^2 + \gamma_{xy}^2} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_y - \varepsilon_x)^2 + \gamma_{xy}^2}\end{aligned}\quad (2)$$

## 2.3 ひずみエネルギー密度関数を用いた応力算出法

本節では、前節で算出したひずみを用いて応力を算出する方法について説明を行う。ひずみエネルギー密度関数とは物体が変形を受けるとポテンシャルエネルギーが蓄えられると仮定したもので、エネルギーは主伸張比  $\lambda_i$  の関数として表される。ここで、 $\lambda_i$  は元の長さを 1 としたときの変形後の長さのことであり、式(3)と表される。なお、式中  $\varepsilon_i$  は主ひずみであり添え字はその方向を示す。

$$\lambda_i = 1 + \varepsilon_i \quad (3)$$

本研究では、式(4)に示す、広範囲なひずみレベルでゴムの実挙動を精度よく再現でき、数値計算において最も広く利用されている Ogden<sup>3)</sup>が提案したひずみエネルギー密度関数を用いる。なおエネルギー関数には体積項が追加される場合もあるが、ここでは非圧縮として体積ひずみを無視する。

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) \quad (4)$$

式(4)における、 $\mu_n$  および  $\alpha_n$  は、一軸伸張、純せん断、一様二軸引張りに代表される試験法によりそれぞれ得られる材料定数である。本研究では一軸伸張試験により得られる材料定数を用いて主応力を算出する。その際、 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  の関係は非圧縮性より式(5)と表せ

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (5)$$

一軸伸張試験において、一方向に引張ると他の二方向に

は自由に収縮するため、 $\lambda_2$ 、 $\lambda_3$  は  $\lambda_1$  を用いると式(6)と表せる。

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad (6)$$

更に式(6)を式(4)に代入し、 $\lambda_1$  で微分すると式(7)に示す主応力  $\sigma_1$  が得られる。

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^N \mu_n (\lambda_1^{\alpha_n-1} - \lambda_1^{-\frac{1}{2}\alpha_n-1}) \quad (7)$$

これにより、主応力  $\sigma_1$  を主伸張比  $\lambda_1$  のみ、つまり主ひずみ  $\varepsilon_1$  のみの関数として表現できる。ひずみエネルギー密度関数を  $\lambda$  で微分して得られる主応力を x 方向応力、y 方向応力、xy せん断応力として評価を行うために、主応力式との関係を用いて分解を行う。

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\end{aligned}\quad (9)$$

式(8)に示す最大、最小主応力式、式(9)に示す等方性材料における主ひずみと主応力の主軸の関係より、式(10)に示す x 方向垂直応力、y 方向垂直応力、xy せん断応力を算出する。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)^2}} \right) \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} \left( \sigma_1 + \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \right)^2}} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} (\sigma_x - \sigma_y)\end{aligned}\quad (10)$$

## 2.4 ひずみエネルギー密度関数の同定法

本節で行うひずみエネルギー密度関数の同定<sup>4)</sup>とは、式(7)を用いて実測値に近い曲線を描くための係数  $\alpha$  および  $\mu$  を同定することに相当する。以下に Ogden 定数同定の流れについて説明を行う。

実験に使用するゴムを用いて一軸引張り試験を行い、応力-伸張比曲線を描く。その後、引張り試験から得られた応力-伸張比曲線にフィットする Ogden 定数を定める。Fig.2 にカーブフィットを行った例を示す。今回カーブフィットには範囲を分割し Ogden 定数を算出した。Table 1 に得られた Ogden 定数を示す。Fig.2 より、Ogden 関数により、実験データを精度良く表現できていることが確認できる。

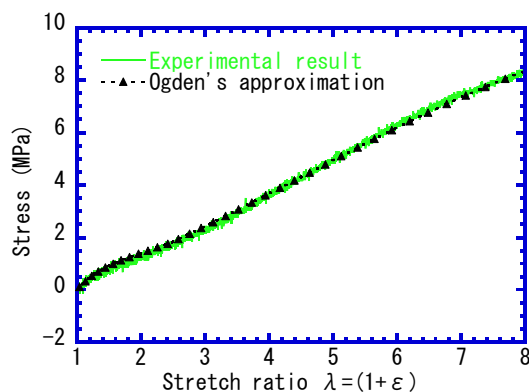


Fig.2 Comparison between Experimental result and Ogden's approximation.

Table 1 Ogden's constant.

| (a) $1 < \lambda < 2.45$ |      | (b) $2.45 < \lambda$ |         |
|--------------------------|------|----------------------|---------|
| N                        | 2    | N                    | 2       |
| $\alpha_1$               | 3.14 | $\alpha_1$           | 4.30    |
| $\mu_1$ (MPa)            | 0.13 | $\mu_1$ (MPa)        | -0.0031 |
| $\alpha_2$               | 0.2  | $\alpha_2$           | 2.5     |
| $\mu_2$ (MPa)            | 8.00 | $\mu_2$ (MPa)        | 0.5     |

### 3. 応力計測法の妥当性検証

本章では、き裂を有するゴム材料 SBR の引張り試験を実施し、提案システムを用いて応力の算出を行い、得られた結果の考察と共に算出した応力の妥当性検証を行う。

#### 3.1 実験条件

き裂を有するゴム材料を用いて引張り試験を行い、試験力 0N、12.0N、21.6N、28.8N、34.1N、40.3N 時の計 6 枚の画像をデジタルカメラで撮影した。Fig.3 に撮影した画像の内、試験力 0N、12.0N、28.8N、40.3N 時の 4 枚を示す。なお応力算出には、Table 1 に示した Ogden 定数を用いた。

#### 3.2 変位および応力計測結果

Fig.4 に増分加算型変形計測法により得られた y 方向変位分布を示す。同図より、増分加算型変形計測法を用いることで、変形や回転が大きいと思われるき裂部周辺でも変位分布が計測可能であることが確認できる。また、荷重値 F が大きいほどき裂が進展し、また、変位量が大きくなっていることが確認できる。以上の結果より、連続画像を用いた増分加算型変形計測法により、連続的な変位挙動を計測することが可能であることを確認した。

Fig.5 にひずみエネルギー密度関数を用いて得られた応力分布を示す。同図より試験力が増加するに従って、応力が増加する様子が確認できる。

Fig.5 に示した応力の妥当性を検証するために、各試験力時における y 方向応力を x 方向、z 方向に積分した値、つまり力として算出した値と実際の試験力との比較を行う。まず、各試験力時における B 断面から B' 断面までの力の分布を Fig.6 に示す。同図より、F=34.1N、40.3N 時では多少のばらつきがあるものの全体的にどの断面でもほぼ一様な値であることが確認できる。

また、Fig.6 に示した各試験力時における計測力を平均した値と実際の試験力との比較を Fig.7 に示す。同図より、全てのケースにおいて試験力と計測力がほぼ一致していることが確認できる。以上の結果から、Fig.5 に示す応力分布図が妥当であることが確認できる。

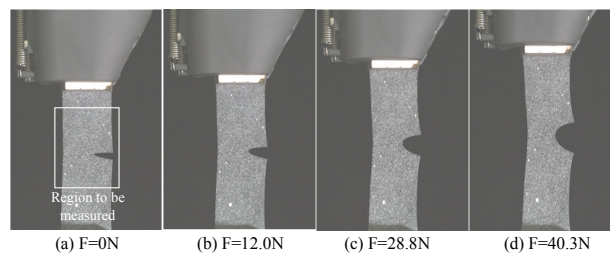


Fig.3 Image used in experiment.

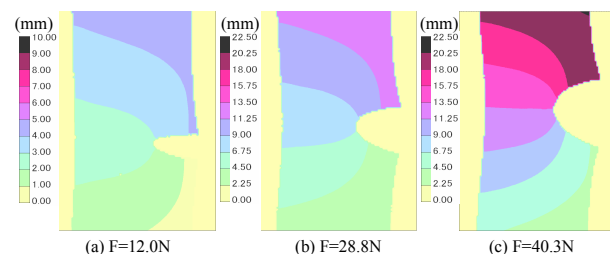


Fig.4 Distribution of displacement in y-direction.

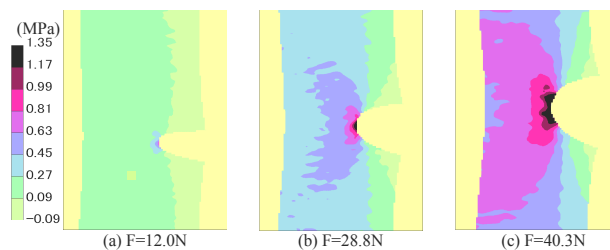
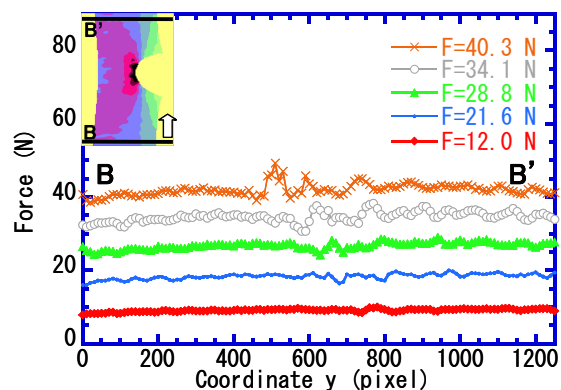
Fig.5 Distribution of stress in y-direction  $\sigma_y$ .

Fig.6 Distribution of force in y-direction.

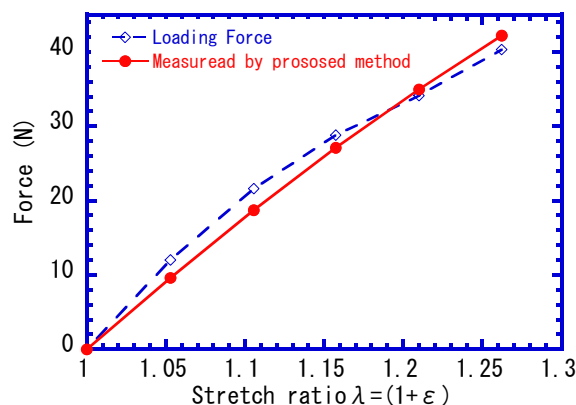


Fig.7 Comparison between loading force and measured force by proposed method force.

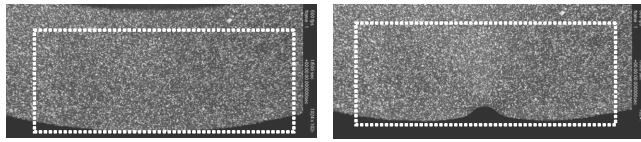


Fig.8 Image of case-1.

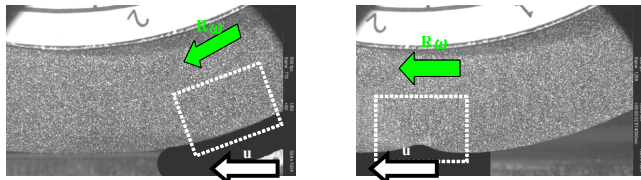


Fig.9 Image of case-2.

#### 4. 応力計測法のゴムと単突起接触試験への適用

本章では 2 種類の実験を行い、得られた結果において比較と考察を行う。

##### 4.1 実験条件

直径 78mm、厚さ 18mm の円形ゴムと単突起との接触試験を行う。実験 1 では荷重を徐々に負荷し最大 75N の荷重がかかる圧縮試験を行い、実験 2 では 75N の負荷をかけつつ、円形ゴムを回転させスリップ率 20% の状態で単突起との接触試験を行う。ただしスリップ率とはタイヤの進行方向を  $u$ 、回転角速度を  $\omega$ 、回転半径を  $R$  とした時に式(11)  $s$  で表される値であり、今回の実験ではゴムの回転方向と同方向に単突起の付いた路面が移動しており、路面速度が回転速度より 20%速い状態である。

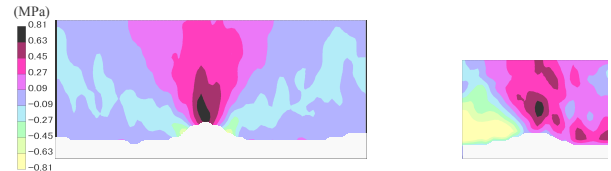
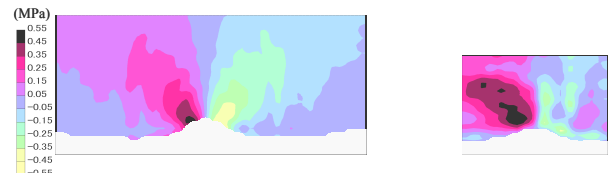
$$s = \frac{u - R\omega}{u} \quad (11)$$

それぞれの実験の計測に使用した画像の内、基準画像と最終変形画像を Fig.8、Fig.9 に示す。画像中の点線の枠は計測領域である。なお実験 1 では、9 枚の画像を使用、実験 2 では 49 枚の画像を使用して計測を行った。

##### 4.2 応力計測結果および考察

実験 1、実験 2 において基準画像から最終変形画像までの連続画像を用いて得られた応力分布を以下に示す。それぞれの実験の  $y$  方向応力分布、 $x$  方向応力分布、 $xy$  せん断応力分布を Fig.10、Fig.11、Fig.12 示す。

まず、Fig.9 より、突起上部では実験 1、2 共に上部からの荷重によって同程度の圧縮応力が発生していることが確認できる。しかし、実験 2 における突起の左部分では実験 1 では発生していない引張りの応力、右部では圧縮の応力が発生している。また、Fig.11 より、突起上部では実験 1、2 共に同程度の引張り応力が発生し、突起左部では実験 2 において圧縮応力、右部では引張りの応力が発生している。これらは、ゴムが回転しながら動いている路面と接触し、なおかつ路面がゴムの回転速度より速く動くためであると考えられる。路面の速度が速いために、突起左部ではゴムの回転方向つまり  $x$  方向に向かって圧縮応力が働き、その影響で  $y$  方向には引張りの応力が発生する。また、右部では突起に接触している部分が路面の速度に引張られるように変形するため、 $y$  方向には引張り、 $y$  方向には圧縮の応力が働く。また、Fig.12(b) から路面の速度によってゴム全体に正のせん断応力がかかり、Fig.12(a)と比較して正のせん断応力が大きくなると考えられる。実験 1 と実験 2 におけるせん断応力の差が

Fig.10 Distribution of stress in y-direction  $\sigma_y$ .Fig.11 Distribution of stress in y-direction  $\sigma_x$ .Fig.12 Distribution of stress in  $xy$   $\tau_{xy}$ .

ゴムの路面における摩擦応力に相当すると考えられる。

以上より、開発した応力計測法をゴムの接触試験に適用することで、非接触で変形・応力状態を計測することが可能となった。

#### 5. 結 言

本研究では連続画像を用いた変形・ひずみ・応力計測システムの構築を行い、提案システムの妥当性の検証および単突起との接触試験への適用を行った結果、以下の結論が得られた。

- 1) 増分加算型変形計測法をき裂を有するゴム材料の引張り試験に適用することで連続的な変形挙動を計測可能であることを確認した。
- 2) ひずみエネルギー密度関数をき裂を有するゴム材料の引張り試験に適用することで、開発した応力計測法の妥当性を確認した。
- 3) 開発した応力計測法をゴム材料と単突起との接触試験に適用することで、複雑な変形状態および、応力分布が計測可能であることを確認した。

#### 参 考 文 献

- 1) 吉田、阿部、藤野：高減衰ゴム材料の構成則、土木学会論文集、No.710/I-60、2002、209-224.
- 2) 米山、森本：デジタル画像相関法による変位測定とその標準化について、日本機械学会シンポジウム講演論文集、第 2003 号、2003、pp.98-103.
- 3) 吉田、杉山：ゴム材料のための Ogden モデルの近似計算法、土木学会論文集 A、Vol.64 No.2、2008.4、pp.217-222.
- 4) 津留崎、飛鳥井：FEM 解析のためのゴム材料の物性パラメータ決定方法、神奈川県産業技術総合研究報告 No.10/2004、pp55-59